Водни проблеми
т. 27, 1993, 49-56.
БАН, София

Метод за оценка на компромисните решения чрез заместваща функция на ценността

Красимира Николова, Николай Киров

Абстракт

Многокритериалният подход при управлението но водностопанските проблеми дава възможност за включване на многобройни цели, които често са конфликтни и несъизмерими. Полученото множество от недоминиращи решения, описващо поведението на системата се анализира от лицето, вземащо решение и се избира най-добрият компромис, съгласуващ интересите. Направена е програмна реализация по метода за оценка на компромисните решения чрез заместваща функция на ценността за IBM PC при нелинейни целеви функции.

1. Увод. Многокритериалният подход е философия, прилагана във водостопанското планиране в западните страни още от средата на седемдесетте години [?], когато към многоцелевия характер на използуване на водните ресурси се добавя и нарасналия интерес към екологичните и социални аспекти на водоползуването. На преден план излизат проблемите по опазване на околната среда, включващи защита и възстановяване на природните ресурси (водоизточници, почва, въздух, растителен и животински свят, природни резервати), на паметници на културата, на екологични системи. Следователно при изграждането и управлението на водохранилищата и водостопанските обекти трябва да се създадат такива условия, че човекът и природата да съществуват в хармония, т.е. да се постигне оптимален баланс между предимствата, постигнати в резултат на техническия прогрес и общественото развитие и отрицателните им последствия върху природата.

За разлика от съществуващата у нас тенденция при водостопански изследвания да се използуват само икономически критерии, днес се налага да се търсят компромиси между такива цели като: регионално развитие, икономически ръст, усвояване на ресурсите, опазване и възпроизводство на околната среда, заетост на населението, здравеопазване, демографска политика и др., които в една или друга степен зависят от постоянното задоволяване нуждите на населението с необходимото количество вода [1]. Следователно вземането на всяко едно водостопанско решение трябва да бъде мотивирано чрез многостранен анализ от колектив включващ специалисти от различни области, на базата на редица допустими алтернативи, оценяващи икономическите, социалните и екологически последствия, произтичащи от реализирането на това решение.

Прилагането на такъв многостранен подход във водното стопанство изисква включването на несъизмерими и противоречиви цели, някои от които трудно се оценяват количествено, а като правило екологичните проблеми възникнали в резултат на водостопанската дейност са в противоречие с някои от основните цели и предназначения на водохранилищата.

Такива противоположни цели са например:

– производство на електроенергия и предпазване от наводнения;

– опазване и поддържане качеството на водите и необходимите средства за пречистване на отпадъчните води;

– доходът от експлоатацията на дадено водохранилище и предпазване от наводнения;

– рекреация и напояване.

Предстоящата приватизация на земята ще сблъска интересите на многобройните собственици, които ще имат различни предпочитания към доставяната вода и нейната цена.

Обединяването на тези многобройни, често пъти трудно поддаващи се на математическа формализация цели (критерии) в една скаларна целева функция за намиране на оптимално решение е невъзможно и тогава една алтернатива е формулирането на задачата като многокритериална (векторна) оптимизация. При нея решението се базира на получаването на множество алтернативни решения с последващ съзнателен избор на едно от тях в диалогов режим. Изборът се извършва от т.н. лице или група лица взимащи решение (ЛВР) въз основа на някакви предпочитания при избора на различните варианти.

2. Формулировка на задачата. Математически задачата за векторна оптимизация може да се формулира по следния начин [2, 3, 5, 6]:

Да се намери екстремумът (минимум или максимум) на векторната функция

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)) \tag{1}$$

$$\text{при} \quad g_k(x) \le 0, \quad k = 1, 2 \dots, m, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2 \dots, N, \tag{3}$$

където компонентите $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ са n гладки целеви функции, x е N-мерен вектор на променливите и $g_k(x)$ са m гладки функции задаващи ограничения. Ограниченията (2) и (3) определят областта X на **възможните (допустими) решения**,

$$X = \{x : g_k(x) \le 0, \quad k = 1, 2 \dots, m, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2 \dots, N\}. \tag{4}$$

За определеност нататък ще считаме, че задачата е за минимум.

За разлика от скаларната оптимизация, където наредбата на допустимите решения е ясна (x_1 е по-добро решение от x_2, ако стойността на единствената целева функция в точка x_1 е по-малка от стойността й в точка x_2), то при многокритериалната обикновено повече от едно допустимо решение може да се смята за оптимално в някакъв смисъл. Затова се въвежда понятието **недоминиращо (оптимално по Парето) решение**, а намирането на най-доброто недоминиращо решение се затруднява поради липсата на правило за комбинирането им, което да ги прави съпоставими. По тази причина "оптималното"решение, което в случая се нарича **най-предпочитано решение** може да бъде получено само при дефиниране на някакви предпочитания в множеството от недоминиращи решения.

Един от начините за това е да се конструира функция на ценността $v(F(x))$, такава, че $v(F(x_1)) < v(F(x_2))$ да означава, че решението x_1 е предпочитано пред решението x_2. Тогава $\min v(F(x))$ за $x \in X$ ще бъде решение на задача (1) – (3) [5]. Въпреки, че съществуват методи за получаването на такава функция, в реалните модели е много трудно да се мотивира изборът. По-често се използват различни похвати за заместването й с въвеждане на показатели, характеристики за оценка или степенуване на предпочитанията.

Тази специфика на многокритериалната оптимизация определя два етапа при решаването на задачата.

1. Получаване на множеството от недоминиращи решения.

2. Избор на най-предпочитания оптимум по Парето от ЛВР, като се конструира заместваща функция на ценността, изразяваща предпочитанията му към получените в т.1 решения.

3. Основни понятия и дефиниции в многокритериалната оптимизация.

1. Основно понятие в многокритериалната оптимизация е предпочитанието и то се изразява чрез бинарни отношения по следния начин. Ако за задача (1) – (3) са получени две решения $x_1, x_2 \in X$, то между тях са възможни следните три отношения:

А) $x_1 \succ x_2$ (Съответно $F(x_1) \prec F(x_2)$), когато $f_i(x_1) \leq f_i(x_2), i = 1, 2, \ldots, n$. Това означава, че първото решение е предпочитано пред второто;

Б) $x_1 \prec x_2$ (Съответно $F(x_1) \succ F(x_2)$), когато $f_i(x_1) \geq f_i(x_2), i = 1, 2, \ldots, n$. Това означава, че първото решение е по-лошо или по-малко предпочитано пред второто;

В) $x_1 \sim x_2$ (Съответно $F(x_1) \sim F(x_2)$) Това означава, че двете решения са в отношение на безразличие или еквивалентност. Към двете решения предпочитанието е еднакво.

2. Недоминиращо или оптимално по Парето решение x^* е допустимо решение на задача (1) – (3) такова, че не съществува друго допустимо решение $\bar{x}$, за което $f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*)$ за $i = 1, 2, \ldots, n$ да е изпълнено като строго поне за едно i [2]. Това

означава, че подобрение на една целева функция (критерий) може да се постигне само за сметка на влошаване на друга целева функция (Фиг. 1 и 2).

Един подход за получаване на недоминиращи решения дава следната теорема:

Теорема [5] . Необходимо условие x^* да бъде оптимална по Парето за (1) – (3) е за всяко $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ да съществуват $n-1$ константи $\varepsilon_k(i), k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, такива, че x^* е минимум на функцията f_i в множеството

$$X = \{x \in X : f_k(x) \geq \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Ако x^* е единствена, то условието е и достатъчно.

Тази теорема е важна, защото дава възможност решаването на първия етап (получаване на оптималните по Парето решения) да се сведе до задача за еднокритериална оптимизация. Константите ε_k могат да се интерпретират като задоволителни нива на целевите функции и да се използват като параметри в еднокритериалната задача:

$$\min f_i(x) \tag{6}$$

$$\text{при} \quad g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

$$f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad j \neq i, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

където f_i се нарича главна (доминираща) функция и се минимизира, а останалите целеви функции на многокритериалната задача $f_j, \quad j \neq i$, се включват като ограничения. Параметрите $\varepsilon_j, \quad j \neq i$ се изменят в интервалите $[f_j(\bar{x}^{(j)}), f_j(\bar{x}^{(j)}) + \bar{\varepsilon}_j]$, където $\bar{\varepsilon}_j > 0$, а $\bar{x}^{(j)}$ е решение на следната оптимизационна задача

$$\min f_j(x) \tag{9}$$

$$g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Чрез вариране на ε_j, се оценява влиянието на функциите $f_j, \ j \neq i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ върху оптимизираната функция f_i.

Този подход е известен в литературата като метод на ограниченията или ε-ограничение подход ([1, 7]). Той дава възможност на една стъпка да се намерят и недоминиращите решения и разменните компромисни функции, които се използват от ЛВР за избор на най-предпочитания оптимум на Парето.

3. Разменните компромисни функции се дефинират като отношение между измененията на два критерия (целеви функции). Например [7]

$$T_{ij}(x) = \frac{df_i(x)}{df_j(x)}, \quad df_i(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} dx_k. \tag{11}$$

Очевидно

$$T_{ii} = 1 \ \text{ и } \ T_{ij} = \frac{1}{T_{ji}}, \quad \text{за всяко} \quad i, j. \tag{12}$$

Тези недоминиращи решения, при които ЛВР проявява готовност за размяна на критерии, т.е. изявява еднаквост на предпочитанията се наричат най-предпочитани оптимални по Парето решения. Те формират "ивицата на безразличието където подобрението на един критерий е равностойно (според ЛВР) на влошаването на друг критерий.

В зависимост от начините на генериране на недоминиращите решения и избор на най-предпочитаното от тях са разработени редица методи за решаване на многокритериалната задача като: Електра, STEP-метод [3], целево програмиране [5], оценяващи функции на полезността [5] и др.

В настоящата разработка е възприет методът за оценка на компромисните решения чрез заместваща функция на ценността [2] (Surrogate Worth Trade-off Method). Този метод е разработен от Haimes и Hall [2, 7] и е приложен в редица разработки от областта на водостопанското планиране, проектиране и експлоатация [7, 8, 9]. При него се пресмятат разменните компромисни функции между всеки две функции, като винаги една от функциите се избира за главна (и се оптимизира), а другите функции влизат в оптимизационната задача като ограничения (вж. (6) – (8)).

4. Генериране на недоминиращите решения и получаване на разменните компромисни функции. Директното получаване на разменните компромисни функции е трудно и за тяхното получаване се използват концепцията за двойнствеността на множителите на Лагранж и представянето на задача (1) – (3) чрез ε-ограничение подход (6) – (8). Функцията на Лагранж за задача (6) – (8) и при условие, че $i = 1$, има следния вид:

$$L(x, \lambda, \mu) = f_1(x) + \sum_{j=2}^{n} \lambda_{1j}(f_j(x) - \varepsilon_j) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(x) \tag{13}$$

където в $\lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots, \lambda_{1n})$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ са обобщените множители на Лагранж.

Решението на (6) – (8) може да се намери от диференциалните условия на Кун и Такър за седлова точка на функцията на Лагранж (13). Ненулевите множители на Лагранж представляват разменните компромисни функции за задача (1) – (3). Задавайки минимални задоволителни нива на функциите $f_j, \quad j = 2, \ldots, n$, ограниченията (8) стават активни ($f_j(x) = \varepsilon_j$) и положителните стойности на $\lambda_{1j} \quad, j = 2, \ldots, n$ са търсените разменни компромисни функции.

Числената процедура за решаване на (1) – (3) с цел получаване на компромисните функции е следната: на целевите функции с индекси $j = 3, 4, \ldots, n$ се задават някакви минимални фиксирани нива ε_j^0, а на функцията $f_2(x)$ се задават последователно k стойности на ε_2: $\varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_2^{(2)}, \ldots, \varepsilon_2^{(k)}$, като всеки път се решава (6) – (8) за $i = 1$. В резултат се получават $\lambda_{12}(\varepsilon_2^{(1)}), \lambda_{12}(\varepsilon_2^{(2)}), \ldots, \lambda_{12}(\varepsilon_2^{(k)})$, от които се избират само положителните стойности $\lambda_{12}(\varepsilon_2^{(l)}), \quad l \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Очевидно λ_{12} е функция и на минималните фиксирани нива $\varepsilon_j^0, \quad j = 3, 4, \ldots, n$. За да получим λ_{13}, решаваме пак (6) – (8) за $i = 1$, но при $f_j = \varepsilon_j^0, \quad j = 2, 4, 5, \ldots, n$ и при нов избор на стойности за $\varepsilon_3^{(l)}$.

Окончателно се получават всички компромисни функции

$$\lambda_{ij}(\varepsilon_1^{(l_1)}, \varepsilon_2^{(l_2)}, \ldots, \varepsilon_{i-1}^{(l_{i-1})}, \varepsilon_{i+1}^{(l_{i+1})}, \ldots, \varepsilon_n^{(l_n)}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j,$$

където $\varepsilon_m^{(l_m)}$ е l_m-тото фиксирано ниво на функцията f_m.

5. Създаване на заместваща функция на ценността. Получените по този начин недоминиращи решения $x \in X$ и стойности λ_{ij} на разменните компромисни функции между всеки два критерия при някакво задоволително ниво на останалите се предлагат като входна информация на ЛВР, което оценявайки своите предпочитания към всяко едно решение създава заместваща функция на ценността по следния начин. Ако λ_{ij} е "оптимална"стойност на разменната компромисна функция, то λ_{ij} единици от i-тата функция ще бъдат равни на една единица от j-тата функция, т.е. решението попада в ивицата на на безразличието.

При оценката на получените решения възниква въпросът: дали граничното изменение на i-тата целева функция е по-ценно за ЛВР отколкото единичното изменение в j-тата функция. Или с други думи доколко ЛВР е съгласно да размени λ_{ij} единици от $f_i(x)$ срещу една единица от $f_j(x)$ при задоволителни нива за останалите цели. Нека отговорите на този въпрос (експертни оценки), изразяващи желанието за размяна на критерии са $W_{ij} \in [-10, 10]$. Тези отговори формират заместващата функция на ценността. Възможни са три случая:

– $W_{ij}(\lambda_{ij}) = 0$, ЛВР е индиферентно към размяната и тогава x е най-предпочитаното решение;

– $W_{ij}(\lambda_{ij}) > 0$, ЛВР предпочита λ_{ij} единици от $f_i(x)$ пред една единица от $f_j(x)$;

– $W_{ij}(\lambda_{ij}) < 0$, ЛВР не предпочита λ_{ij} единици от $f_i(x)$ пред една единица от $f_j(x)$.

Един начин за определяне ивицата на безразличието е приложение на многомерния регресионен анализ за апроксимиране на зависимостите между определените от ЛВР оценки на компромисите W_{ij} и съответните им стойности на целевите функции f_i и f_j. Получените апроксимации се полагат равни на нула и се решава системата от уравнения. Ако полученото решение е допустимо, то то принадлежи към ивицата на безразличието.

Тези резултати трябва да се предложат на ЛВР за проверка, тъй като функциите на ценността са само апроксимация на реалните предпочитания. По обратен път се пресмятат компромисните функции и променливите и се представят на ЛВР, за да се установи дали го задоволяват тези стойности. Ако според него това решение не е безразлично, трябва да се генерират нови недоминиращи решения около $W_{ij} = 0$. Отново се оценяват новите резултати и т.н. до достигане на най-предпочитаното (от ЛВР) решение.

6. Програмна реализация. Реализиран е следният математически модел:

$$\min(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)) \tag{14}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, \tag{15}$$

където $f_i, i = 1,2,3$ са изпъкнали и гладки (линейни или нелинейни) функции, дефинирани в R^2.

Съгласно (6) – (8) задачата се свежда до решаване на трите задачи:

$$\min f_i(x,y) \tag{16}$$

$$\begin{array}{l} f_j(x,y) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1,2,3, i \neq j, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{array} \tag{17}$$

за $i = 1,2,3$.

За определеност ще разгледаме случая $i = 1$. Нека решението е (x_0, y_0). Седловата точка на обобщената функция на Лагранж

$$L(x,y,\lambda_{12},\lambda_{13}) = f_1(x,y) + \lambda_{12}(f_2(x,y) - \varepsilon_2) + \lambda_{13}(f_3(x,y) - \varepsilon_3) \tag{18}$$

удовлетворява условията

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_{12},\lambda_{13}) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda_{12}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda_{13}\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_{12},\lambda_{13}) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda_{12}\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda_{13}\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{array} \tag{19}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_{12}}(x_0,y_0,\lambda_{12},\lambda_{13}) = f_2(x_0,y_0) - \varepsilon_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_{13}}(x_0,y_0,\lambda_{12},\lambda_{13}) = f_3(x_0,y_0) - \varepsilon_3 = 0. \end{array} \tag{20}$$

С програмата могат да се решават три вида задачи:

1. Зададени са x_0 и y_0. Определят се стойностите на целевите функции $f_1(x_0,y_0)$, $f_2(x_0,y_0)$ и $f_3(x_0,y_0)$. От (19), решавайки системата линейни уравнения, определяме λ_{12} и λ_{13}.

2. Зададени са стойностите ε_2 и ε_3. От системата (20) се определят x_0 и y_0 и след това от (19) се намират λ_{12} и λ_{13}.

3. Този случай представлява обратна задача, когато ЛВР има определени предпочитания към стойностите на компромисните функции, които според него принадлежат към ивицата на безразличието. Тогава при зададени λ_{12} и λ_{13} от системата (19) се намират x_0 и y_0, след което могат да се пресметнат и стойностите на $f_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$ и $f_3(x_0, y_0)$.

Входните данни за задачата, включително и формулите за целевите функции се задават във вид на текстов файл. За символни преобразувания и за намиране на производни е използвана системата SYSYTRA [9].

Системите нелинейни уравнения се решават по метода на Нютон-Рафсон, като се използват точни първи производни. За третия вид задачи са необходими и вторите производни на целевите функции. Системите линейни уравнения се решават по метода на Гаус с избор на главен елемент.

Програмната система е написана на TURBO PASCAL 5.0 за персонален компютър IBM PC. Система от менюта улеснява работата на потребителя. Изходната информация може да се запише на файлове за по-нататъшна обработка.

За тестване на програмата е използван примера, даден в [7]. Решени са и много варианти за реална водностопанска система [10].

Литература

[1] Loucks D., J. Stedinger, D. Haith. Water Resources Systems Planning and Analysis. Prentice-Hall, 1981.

[2] Haims J., W. Hall, Freedman. Multiobjective Optimization in Water Resources Systems. The SWTM, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, 1975.

[3] Cohon J., D. Marks. A review and evaluation of multuobjective programming techniques. Water Resources Research, April 1975, Vol.11, No.2.

[4] Tyszewski S., P. Zielinski. Optimalizacja wielonryterialna w gospodarce wodnej-przeglad metod i ocenaprzydatnosci. Gospodarka Wodna, 1978, Nr.1.

[5] Po-Lung Yu. Multiple-Criteria Decision Making. 1985, Plenum Press, New-York, London.

[6] Миркин С. Г. Проблема группового выбора. Москва 1974.

[7] Haimes J., W. Hall. Multiobjectives in water resources system analysis. The sorugate worth trade off method. Water Resources Research, August, 1974, Vol.10, No.4.

[8] Helweg O., T. Uan On. Nonlinear reservoir analysis with risk-benefit objectives. Water international, 13, 1988, 80-84.

[9] Kelevedzhiev E., N. Kirov. Interactive Optimization Systems. IIASA Working Paper, WP-89-007, 1989.

[10] Николова К., Н. Киров. Многокритериален подход при разпределение на водните ресурси. "Водни проблеми под печат.