XXXV пролетна конференция на Съюза на математиците в България
Боровец, 5-8 април 2006 г.

Оптимално разпределение на мандатите на партиите за 40. Народно събрание по избирателни райони

Камен Г. Иванов*, Николай К. Киров**, Никола И. Янев***

*Институт по математика и информатика, БАН

**Институт по математика и информатика, БАН & Департамент Информатика, НБУ

***Факултет по математика и информатика, СУ "Св. Кл. Охридски"

- ЗАКОН ЗА ИЗБИРАНЕ НА НАРОДНИ ПРЕДСТАВИТЕЛИ
- Задача за разпределение на мандатите по партии
- Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони
  - Модел 1. Транспортна задача
  - Модел 2. Минимизиране на най-малката цена на мандата
  - Модел 3. Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати
  - Модел 4. Задача за монотонност
  - Модели 5, 6, 7. Минимизиране на отклонението по l_∞, l_1 и l_2 норми
- Сравнителни резултати

ЗАКОН ЗА ИЗБИРАНЕ НА НАРОДНИ ПРЕДСТАВИТЕЛИ
(Извадки)

Чл. 6. (2) За разпределение на мандатите между партии и коалиции се използва **методът Д'Ондт** на *национално ниво*.

Чл. 23. (1) **Централната избирателна комисия:**

10. (предишна т. 9, доп. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.) приема и обнародва в "Държавен вестник"методика за определяне на броя на мандатите *в избирателните райони* и **методика за определяне на резултатите от гласуването** не по-късно от 55 дни преди изборния ден;

11. (предишна т. 10 - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.) определя броя на мандатите в многомандатните избирателни райони въз основа на единна норма на представителство за цялата страна в зависимост от броя на населението;

Чл. 107. (Изм. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.)

(1) *Общият брой спечелени мандати* за всяка партия и коалиция се определя от Централната избирателна комисия въз основа на сумата на подадените за нея действителни гласове в страната и в чужбина по **метода на Д'Ондт** според методиката по чл. 23, ал. 1, т. 10.

(3) Броят на мандатите на партии и коалиции *в многомандатните избирателни райони* се определя по **метода Д'Ондт** въз основа на съотношението на гласовете за тях, подадени от страната.

Чл. 109. (Изм. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.) Разпределянето на мандатите по кандидатските листи на партиите и коалициите *в многомандатните избирателни райони* става съгласно методиката по чл. 23, ал. 1, т. 10.

МЕТОДИКА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА БРОЯ НА МАНДАТИТЕ В ИЗБИРАТЕЛНИТЕ РАЙОНИ И НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ГЛАСУВАНЕТО

(Извадка)

Чл. 16. (1) Получените от всяка партия или коалиция мандати в национален мащаб (съгласно чл. 15, ал. 1) се разпределят по *избирателни райони* като се прилага **метода на Д'Ондт** (приложение номер 1) към гласовете на партията или коалицията в районите, където имат регистрирани кандидатски листи.

(2) Ако има несъответствие между предварително определените мандати *за районите* и получените такива в резултат на разпределението по райони по ал. 1 за коалиции, партии и независими кандидати, то се извършва **преразпределение** съгласно приложение номер 2.

Задача за разпределение на мандатите по партии

Дадени са p партии ($p = 7$), които събират повече от 4% от действителните гласове на изборите за 40. Народно събрание.

Означаваме партиите с 3@, 6@, 8@, 12@, 14@, 17@ и 19@ (съгласно номерацията на ЦИК)

Нека на изборите i-тата партия е получила общо V_i действителни гласове, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Дадени са p неотрицателни числа V_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, и цяло число M, ($M = 240$). Търсим цели $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, такива че

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = M$$

и $\{n_i\}$ да са “пропорционални” на $\{V_i\}$.

Тук понянието “пропорционални” означава, че отношенията V_i/n_i, $i = 1, 2, \dots, p$, са максимално “близки”.

Решението по *метода на Д’Ондт* се определя от условието “минималната цена на мандата е максимална”, т.е. решение на следната оптимизационна задача:

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \to \max$$

при условие

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = M.$$

Полученото решение за тези избори е:

No i	партия	гласове V_i	мандати n_i
1	3@	1129196	82
2	6@	725314	53
3	8@	234778	17
4	12@	189268	13
5	14@	296848	21
6	17@	467400	34
7	19@	280323	20
			240

Това е и разпределението на ЦИК на мандатите по партиите.

Решението е монотонно – за повече гласове се получават повече мандати.

$$(V_i - V_k)(n_i - n_k) \geq 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, p$$

Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони

Дадени са r избирателни района ($r = 31$), като за всеки район е определен предварително броят на мандатите m_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ в този район – по закон пропорционално на населението му.

Броят на мандатите в избирателните райони са:

01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
10	13	14	9	4	7	4	7	5	5	5	6	9	5	10

16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
10	11	5	8	4	7	4	13	11	12	8	11	4	8	6	5

Задачата е да се разпределят получените мандати на партиите по избирателните райони “пропорционално” на гласовете на всяка партия във всеки район.

Нека x_{ij} са мандатите на i-тата партия в j-тия район от търсеното разпределение.

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

x_{ij} са *цели неотрицателни* числа.

(**транспортни равенства**)

Ще решаваме задачата при следните две предположения за участващите в разпределението партии:

- Всяка партия има регистрация във всички избирателни райони с достатъчно дълга партийна листа.
- Всяка партия получава поне един глас във всеки избирателен район, т.е. $v_{ij} > 0$ за всички i и j.

Получените действителни гласове образуват матрицата на вота с елементи v_{ij} – броят на гласовете на i-тата партия в j-тия район, $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, r$.

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:
3@	34771	56050	55942	45205	24545	38996	19817	35478	17746	27685
6@	28448	35201	60248	27521	10869	19679	16417	21457	4870	16955
8@	7376	8683	13130	7247	2594	3685	4025	4002	1064	3762
12@	7497	7468	11707	7357	2795	6515	3622	5955	540	2818
14@	6142	20679	17920	15272	2608	6808	6303	7748	2229	3065
17@	25472	28557	18916	6121	8026	1213	4041	14058	63570	978
19@	14899	12697	15427	10226	4327	6771	6459	3926	1975	4844

	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:
3@	25531	30826	39100	23444	52499	42434	54575	15975	33400	23262
6@	16765	15824	23978	15455	26851	42996	33498	9549	25945	10162
8@	4538	2461	5560	3839	6470	14105	6027	1430	7050	1360
12@	3793	3138	7089	2889	8609	7678	7474	1772	7396	1805
14@	6485	4418	9163	4029	14165	12946	12314	5133	15125	4250
17@	5658	3047	14829	261	10238	11797	15331	36435	14483	27514
19@	5867	6514	12725	7058	11920	21187	15060	2290	10558	2130

	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	28006	18308	62206	47318	53267	40210	56809	22528	42585	26972	27581
6@	14878	9813	43311	36011	35644	20860	28980	6262	23826	16018	13591
8@	3363	4097	36536	29869	20693	5607	9435	2493	4452	2468	2324
12@	4363	5365	11129	13133	13636	5612	9848	2759	8505	2050	3472
14@	7941	2461	16992	15437	17554	11590	15325	5897	10033	10412	4837
17@	8414	9060	899	4097	954	4712	8929	28610	21156	27455	1943
19@	5745	5624	20148	15336	14911	7296	12046	2003	6535	6065	4207

Отново, както и при едномерната задача, понятието “пропорционални” не е добре определено.

Характерна особеност на двумерната задача е, че прилагането на аналози на едномерните пропорционални методи води до резултати, нарушаващи интуитивните разбирания за добро решение.

Например, решението може да е немонотонно (за по-малко гласове се получават повече мандати за някои партии или в някои райони), максималната и минималната цени на мандатите може да са много различни и т.н.

Тези проблеми са присъщи на двумерната задача – за някои начални данни не може да имаме монотонност и достатъчно близки цени на мандатите!

Понятието “метод на Д’Ондт” е приело гражданственост у нас и по отношение на двумерната задача.

Разпределението на ЦИК означаваме с X_0 и то е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	2	3	3	3	3	$\boxed{5}$	2	3	0	3	3	4	4	3	4
6@	2	2	4	2	1	$\boxed{2}$	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14@	0	2	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
17@	2	3	1	0	0	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1
19@	2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	$\boxed{3}$	1	2	1	3	2	$\boxed{1}$	1	3	5	5	1	2	1	4
6@	2	$\boxed{3}$	0	2	0	2	1	$\boxed{2}$	2	2	2	2	0	2	1	1
8@	1	0	0	0	0	0	0	5	4	2	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	2	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	1	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	2	0	1	0	0	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0

Защо това разпределение не ни харесва?

Примери по райони:

Район $\rightarrow$	23:		24:	
3@	62206	1	47318	1
6@	43311	2	36011	2
8@	36536	5	29869	4

Район $\rightarrow$	09:	
3@	17746	0
17@	63570	5

Примери по партии:

Партия	6:		17:		23:	
$\boxed{3@}$	38996	$\boxed{5}$	54575	$\boxed{3}$	62206	$\boxed{1}$
$\boxed{6@}$	19679	$\boxed{2}$	33498	$\boxed{3}$	43311	$\boxed{2}$

Кое е "хубаво" разпределение?

Няма най-добър критерий за това – зависи от модела.

Модел 1.

Модел, аналогичен на транспортна задача.

За повече гласове се получават повече мандати – “транспортните разходи” са обратно пропорционални на броя гласове.

Целева функция (общите “транспортни разходи”) е:

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \quad \to \quad \text{min}$$

при транспортните ограничения:

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p \qquad \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

Оптимално решение X_1:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	0	0	0	0	4	$\boxed{7}$	0	7	0	5	5	6	0	5	10
6@	0	0	14	9	0	$\boxed{0}$	4	0	0	0	0	0	9	0	0
8@	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14@	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17@	6	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0
19@	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	0	$\boxed{0}$	0	0	0	7	4	$\boxed{0}$	0	0	8	5	0	4	0	5
6@	0	$\boxed{11}$	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0	6	0	0	0	0
8@	0	0	0	0	0	0	0	7	10	0	0	0	0	0	0	0
12@	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	0	0	0	0	0	0
14@	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17@	0	0	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4	4	6	0
19@	10	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0

Стойност на целевата функция $F_1(X_1) = 0.00908$.

Това решение е неприемливо, защото мандатите в един район се дават само на една или две партии.

Решението на ЦИК: $F_1(X_0) = 0.01165$.

Модел 2.

Максимизираме най-малката цена на мандата.

Цената на мандата за i-тата партия в j-тия район е $\dfrac{v_{ij}}{x_{ij}}$.

$$\min_{i,j} \frac{v_{ij}}{x_{ij}} \quad \to \quad \max$$

За да избегнем безкрайни стойности и да линеаризираме модела, вземаме реципрочна стойност на цената на мандата.

$$F_2(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \quad \to \quad \min$$

Едно оптимално решение е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	5	7	6	6	3	$\boxed{5}$	2	4	0	4	3	4	5	3	2
6@	4	0	0	1	0	$\boxed{2}$	2	3	0	1	2	2	0	1	3
8@	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
17@	1	1	2	0	1	0	0	0	5	0	0	0	2	0	1
19@	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	0	$\boxed{1}$	0	0	1	4	2	$\boxed{0}$	0	0	5	1	0	3	2	4
6@	4	$\boxed{4}$	0	3	0	1	1	$\boxed{3}$	2	5	1	4	0	3	0	1
8@	2	0	0	0	0	0	0	5	4	3	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	0	2	0	1	0	2	2	2	1	2	0	1	1	0
17@	0	2	5	1	3	1	1	0	0	0	0	1	4	0	3	0
19@	3	2	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Целева функция $F_2(X_2) = 0.00014502$.

Тя се достига в (3@, 31:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{1\ 31}}{v_{1\ 31}} = \frac{4}{27581} = 0.00014502.$$

За решението на ЦИК получаваме $F(X_0) = F(X_2)$.

Модел 3.

Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати (реципрочните стойности на цените на мандатите)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j:\ x_{ij}>0} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \quad \to \quad \min,$$

По-проста целева функция, която отново реализира идеята на модела:

$$F_3(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j} \frac{x_{ij}+1}{v_{ij}} \quad \to \quad \min\,.$$

Намереното оптимално решение X_3 е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	2	4	4	3	2	$\boxed{3}$	2	2	1	3	3	4	2	2	3
6@	2	2	4	2	1	$\boxed{2}$	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	2
17@	2	2	1	0	1	0	0	2	4	0	0	0	2	0	1
19@	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	$\boxed{4}$	1	2	1	3	2	$\boxed{4}$	3	3	3	4	1	3	1	4
6@	3	$\boxed{2}$	0	1	0	2	1	$\boxed{3}$	2	2	3	2	0	1	1	1
8@	2	0	0	1	0	0	0	4	3	2	0	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	0	2	0	1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	0
17@	0	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	2	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	0	0	0	0

Целевата функция $F_3(X_3) = 7.3538 \times 10^{-5}$.

Тази стойност се достига за (19@, 06:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{76}}{v_{76}} = \frac{1}{6771} = 14.7689 \times 10^{-5}$$

и (3@, 30:)

$$\min_{i,j} \frac{x_{ij}+1}{v_{ij}} = \frac{x_{1\,30}+1}{v_{1\,30}} = \frac{2}{26972} = 7.4151 \times 10^{-5}.$$

$$F_3(X_0) \approx 11.2 \times 10^{-5}$$

Модел 4.

Задача за монотонност едновременно по партии и по райони.

Когато една партия е получила повече гласове в един район в сравнение с друг, тя получава и не по-малко мандати в първия район в сравнение с втория.

Ако за i-тата партия в j-тия и k-тия райони е в сила $v_{ij} > v_{ik}$, тогава е изпълнено $x_{ij} \geq x_{ik}$

———

Когато една партия е получила повече гласове от друга партия в даден район, тя получава не по-малко мандати в този район.

Ако в j-тия район за i-тата и k-тата партии е изпълнено $v_{ij} > v_{kj}$, то сила е и $x_{ij} \geq x_{kj}$.

$$\mu_{ijk} = (x_{ij} - x_{ik})\,\mathsf{sign}(v_{ij} - v_{ik}) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p, \;\; j = 1, \ldots, r, \;\; k = 1, \ldots, j;$$
$$\nu_{ijk} = (x_{ij} - x_{kj})\,\mathsf{sign}(v_{ij} - v_{kj}) \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, p, \;\; j = 1, \ldots, r, \;\; k = 1, \ldots, i.$$

Областта, определена от тези неравенствата и транспортните равенства е празна.

Модификация – ако разликата в гласовете на две партии в даден район е по-малко от 1000, считаме, че тези две партии са получили равен брой гласове – допустимата област на новата задачата е отново празна.

Релаксирана задача:

$$F'_4(X) = z \quad \rightarrow \quad \text{min}$$

при условия транспортните равенства и

$$\mu_{ijk} + z \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, p, \;\;\; j = 1, \ldots, r, \;\;\; k = 1, \ldots, j;$$
$$\nu_{ijk} + z \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, p, \;\;\; j = 1, \ldots, r, \;\;\; k = 1, \ldots, i.$$

Тази задача има решение с оптимална стойност $z = 1$.

Това означава, че ако $v_{ij} > v_{ik}$, то $x_{ij} \geq x_{ik} - 1$.

Минимизираме броя на немонотонностите.

Немонотонност в район j наричаме двойка партии (i_1, i_2), за които $v_{i_1 j} > v_{i_2 j}$ и $x_{i_1 j} < x_{i_2 j}$.

Аналогично се дефинира и немонотонност в партия.

$$\mu_{ijk} + M y_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, r, \quad k = 1, \ldots, j-1;$$

$$\nu_{ijk} + M z_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, r, \quad k = 1, \ldots, i-1,$$

$y_{ijk}, z_{ijk} \in \{0, 1\}$, $M > 0$

Когато двоична променлива y_{ijk} или z_{ijk} има стойност 0, тогава удовлетворяването на съответното неравенство показва монотонност, а при стойност 1 – немонотонност.

Целевата функция е броят на немонотонностите:

$$F_4''(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{j-1} y_{ijk} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{i-1} z_{ijk} \quad \to \quad \min$$

Получено е решение X''_4 при $M = 1$ и $F''_4(X''_4) = 24$ (7 в партии и 17 в райони).

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	3	3	2	$\boxed{3}$	2	3	0	3	2	3	3	2	3
6@	2	2	4	2	1	$\boxed{2}$	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1
19@	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	$\boxed{3}$	0	3	2	3	2	$\boxed{4}$	3	3	3	4	2	3	2	3
6@	2	$\boxed{2}$	0	2	0	2	1	$\boxed{2}$	2	2	2	2	0	2	1	2
8@	1	1	0	0	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	1	2	5	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	1	2	0
19@	1	1	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Решението на задачата при $M = 1$ с непрекъснати променливи

$$y_{ijk}, z_{ijk} \in [0, 1]$$

е целочислено (различно от X_4'') със същата стойност 24 на целевата функция.

Моделът за $M = 1$ беше решен с двете програми GLPK и CPLEX.

И двата пакета не можаха да решат същия модел за $M = 10$.

Модел 5.

Минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия.

Например, ако една партия е получила $\frac{1}{k}$ част от гласовете в даден район, то тази партия би трябвало да получи приблизително $\frac{1}{k}$ част от определените мандати за този район, т.е. $\frac{v_{ij}}{w_j} \approx \frac{x_{ij}}{m_j}$, където w_j е сумата от гласовете на участващите в разпределението партии в този район.

$$w_j = \sum_{i=1}^{p} v_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Аналогично се реализира тази идея и за разпределението на мандатите на една партия по райони – искаме $\frac{v_{ij}}{v_i} \approx \frac{x_{ij}}{n_i}$, където v_i е сумата от гласовете на партия i във всички райони.

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} v_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Прецизирането на понятието близост ни води към използване на класическа l_p норма (l_s норма).

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right|^s + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{p} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right|^s \quad \to \quad \min$$

Най-напред да формулираме задачата с равномерна (l_∞) норма:

$$F_5(X) = \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \quad \to \quad \min$$

Решението X_5 е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	2	6	6	2	2	$\boxed{3}$	1	2	1	3	2	3	2	2	5
6@	2	2	3	2	1	$\boxed{1}$	1	2	0	1	1	1	3	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14@	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
17@	3	1	1	1	1	1	0	2	4	0	1	1	2	0	0
19@	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	$\boxed{5}$	1	2	1	3	1	$\boxed{5}$	2	6	3	3	1	2	1	2
6@	4	$\boxed{2}$	1	1	1	2	1	$\boxed{2}$	4	1	3	3	1	2	2	1
8@	1	0	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	0	1	3	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1

Стойност на целевата функция

$$F_5(X_5) = 0.16124 + 0.03775 = 0.19899$$

при (12@, 13:) и (6@, 28:).

За решението на ЦИК получаваме

$$F_5(X_0) = 0.13509 + 0.35964 = 0.49473$$

при (8@, 23:) и (17@, 20:).

Модел 6.

Минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия.

За да получим лесно решими задачи с l_s норма за $1 \leq s < \infty$, предлагаме една подходяща линеаризация на тези задачи.

За всяка двойка (i, j), $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, r$ полагаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \cdots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^{q} kx_{ijk},$$

$$\left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i} \right|^s = f_{ijk}^{(1)}, \quad \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j} \right|^s = f_{ijk}^{(2)}, \quad k = 0, 1, \ldots, q.$$

Целевата функция е:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{q} \left(f_{ijk}^{(1)} + f_{ijk}^{(2)} \right) x_{ijk}.$$

Търсим

$$\min F(X)$$

при преобразуваните транспортни равенства:

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} k x_{ijk} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} k x_{ijk} = m_j, \ j = 1, 2, \ldots, r$$

и

$$\sum_{k=0}^{q} x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \text{ за всяко } i, j, k.$$

Размерите на задачата за $p = 7$, $r = 31$, $q = 6$ са:

– брой неизвестни: $pr(q + 1) = 1519$;

– брой събираеми в целевата функция: $pr(q + 1) = 1519$;

– брой ограничения: $p + r = 38$ от първия вид и $pr = 217$ от втория вид.

Най-напред ще използваме l_1 норма.

$$F_6(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i}\right| + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}\left|\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j}\right| \quad \rightarrow \quad \min$$

Прилагаме описаната техника за този модел и решаваме получената задача.

Оптималната стойност на целевата функция е $F_6(X_6) = 12.2766$ за следното решение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	4	3	2	$\boxed{3}$	1	3	1	2	2	3	3	2	4
6@	2	3	4	2	1	$\boxed{2}$	1	2	0	2	1	1	2	1	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	4	0	1	1	1	0	1
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	$\boxed{4}$	1	2	1	3	1	$\boxed{4}$	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	3	$\boxed{2}$	1	2	1	1	1	$\boxed{3}$	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Модел 7.

Най-използваният модел за отклонение от средното е минимизация с l_2 норма (най-малки квадрати).

$$F_7(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right)^2 \quad \to \quad \min$$

Въпреки, че CPLEX решава квадратични задачи с линейни ограничения, опитът за директно решаване на модела не доведе до успех.

След линеаризиране на задачата по описания по-горе начин и решаването на получената линейна целочислена задача, намираме стойност на целевата функция $F_7(X_7) = 0.702059$ за следното разпределение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	4	3	2	$\boxed{3}$	1	3	1	2	2	3	3	2	4
6@	2	2	4	2	1	$\boxed{2}$	1	2	0	2	1	2	2	1	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	3	2	0	1	0	0	1	4	0	1	0	1	0	1
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	$\boxed{4}$	1	2	1	3	1	$\boxed{4}$	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	3	$\boxed{2}$	1	2	1	1	1	$\boxed{3}$	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Това решение е единствено!

За да докажем това твърдение, към ограниченията на задачата добавяме още едно:

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk} \le pr - 1,$$

където $\{x_{ijk}^{(0)}\}$ е намереното решение на линеаризираната задача. Тъй като очевидно

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{q} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} 1 = pr,$$

то решението на новата задача ще бъде друго. За стойност на целевата функция за новото решение получаваме

$$0.703095 > F_7(X_7) = 0.702059.$$

Защо полученото от този модел разпределение е по-добро?

Примери по райони:

Район →	23:		24:	
3@	62206	4	47318	3
6@	43311	3	36011	2
8@	36536	3	29869	2

Район →	09:	
3@	17746	1
17@	63570	4

Примери по партии:

Партия	6:		17:		23:	
$\boxed{3@}$	38996	$\boxed{3}$	54575	$\boxed{4}$	62206	$\boxed{4}$
$\boxed{6@}$	19679	$\boxed{2}$	33498	$\boxed{2}$	43311	$\boxed{3}$

Сравнителни резултати

Таблица със стойностите на целевите функции за получените от моделите решения, за решението на ЦИК и предложеното от И. Божинов.

	F_1 $\times 10^{-2}$	F_2 $\times 10^{-4}$	F_3 $\times 10^{-4}$	F_4''	F_5	F_6 $\times 10$	F_7
X_1	**0.908**	8.80	8.64	246	1.7634	4.987	18.39
X_2	1.151	**1.45**	1.29	352	0.7296	2.627	4.173
X_3	1.216	1.48	**0.74**	153	0.4409	1.691	1.585
X_4'	2.421	3.83	3.70	378	0.5982	2.029	2.197
X_4''	1.128	1.79	1.25	**24**	0.5793	1.511	1.359
X_5	1.520	8.24	7.68	214	**0.1990**	1.617	1.183
X_6	1.426	3.28	2.49	61	0.2035	**1.228**	0.705
X_7	1.400	2.60	1.82	61	0.2035	1.231	**0.702**
X_0	1.166	1.45	1.12	148	0.4947	1.836	2.043
IB	1.435	5.32	4.53	178	0.4458	1.459	1.200

Благодаря за вниманието.