МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2006
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2006
Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 5–8, 2006

ОПТИМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА МАНДАТИТЕ НА ПАРТИИТЕ ЗА 40. НАРОДНО СЪБРАНИЕ ПО ИЗБИРАТЕЛНИ РАЙОНИ

Камен Г. Иванов, Николай К. Киров, Никола И. Янев

На изборите за 40. Народно събрание 7 партии събраха повече от 4% от действителните гласове на избирателите и участваха в разпределението на 240 мандати. Според избирателния закон [1] мандатите бяха разделени между тези партии по метода на Д'Ондт. След това получените мандати на партиите трябваше да бъдат разпределени по избирателни райони. Това стана според приета от ЦИК методика [4] и предизвика основателно недоволство от обществеността [5], защото сериозно беше нарушен принципът за права пропорционалност на получените гласове и разпределените мандати на партиите в даден район.
В настоящата работа се формулират и решават няколко оптимизационни модела за тази задача. Показано е, че методиката на ЦИК дава оптимално решение (едно от много) за някои от моделите. Също така са намерени и по-добри решения, като в модела за най-малко квадратично отклонение от пропорционалността решението е единствено.

Задача за разпределение на мандатите по партии

Дадени са p партии ($p = 7$), които събират повече от 4% от действителните гласове на изборите за 40. Народно събрание. Означаваме партиите с 3@, 6@, 8@, 12@, 14@, 17@ и 19@ (съгласно номерацията на ЦИК). Нека на изборите i-тата партия е получила общо V_i действителни гласове, $i = 1, 2, \dots, p$. Мандатите за Народно събрание (с 240 депутати) на тези партии трябва да се определят пропорционално на получените гласове по метод на Д'Ондт [1]. Тази задача може да се формулира по следния начин:

Дадени са p неотрицателни числа V_i, $i = 1, 2, \dots, p$, и цяло число M. Търсим цели $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, такива че

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = M$$

и $\{n_i\}$ да са "пропорционални" на $\{V_i\}$. Тук понянието "пропорционални" означава, че отношенията V_i/n_i, $i = 1, 2, \dots, p$, са максимално "близки". Но както е добре известно има различни математически определения за близост, които пораждат и различни пропорционални методи.

Например, решението по *метода на Д'Ондт* се определя от условието "минималната цена на мандата е максимална", т.е. решение на следната оптимизационна задача:

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \to \max .$$

Необходимо и достатъчно условие числата n_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, да са решение на тази (едномерна) задача по метода на Д'Ондт е

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \geq \max_i \frac{V_i}{n_i + 1} .$$

Полученото решение за тези избори е:

No i	партия	гласове V_i	мандати n_i
1	3@	1129196	82
2	6@	725314	53
3	8@	234778	17
4	12@	189268	13
5	14@	296848	21
6	17@	467400	34
7	19@	280323	20
	Общо		240

Това е и разпределението на ЦИК на мандатите по партиите [2].

Решението по *метода на Сент Лагьо* се определя от условието

$$\min_i \frac{V_i}{\max\{n_i - 1/2, 0\}} \to \max .$$

Този метод се прилага например в Германия. В Швеция се прилага *модифициран* метод на Сент Лагьо – когато $n_i = 1$, знаменателят е 0.7 (вместо 0.5). Това са примери за методи с делители. Друга голяма група пропорционални методи са тези на "максималния остатък". Характерно за всички прилагани сега пропорционални методи е, че дават почти еднакви резултати, когато параметрите на задачата са както в българските парламентарни избори – общ брой мандати над 100 и поне 10 мандата за всяка партия в парламента.

Едно от нарушенията на пропорционалността, което се възприема интуитивно от хората, води до правилото "не може с по-малко гласове да получиш повече мандати". Математическото понятие за това е "монотонност", която се определя с неравенствата $(V_i - V_k)(n_i - n_k) \geq 0$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$. Трябва да отбележим, че всички използвани днес пропорционални методи за решаване на едномерната задача са монотонни.

Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони

Дадени са r избирателни района ($r = 31$), като за всеки район е определен предварително броят на мандатите $m_j, j = 1, 2, \ldots, r$ в този район – по закон пропорционално на населението му [1]. Броят на мандатите в избирателните райони са:

01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
10	13	14	9	4	7	4	7	5	5	5	6	9	5	10	10	11	5	8	4	7	4	13	11	12	8	11	4	8	6	5

Задачата е да се разпределят получените мандати на партиите по избирателните райони, ако са известни гласовете на партиите по райони. Нека x_{ij} са мандатите на i-тата партия в j-тия район от търсеното разпределение. Тогава трябва да бъдат изпълнени равенствата:

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

като x_{ij} са *цели неотрицателни* числа. Тези ограничения са същите както при целочислена транспортна задача.

Получените действителни гласове образуват матрицата на вота с елементи v_{ij} – броят на гласовете на i-тата партия в j-тия район, $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, r$. За опростяване на аргументацията ще решаваме задачата при следните две предположения за участващите в разпределението партии:

- Всяка партия има регистрация във всички избирателни райони с достатъчно дълга партийна листа.
- Всяка партия получава поне един глас във всеки избирателен район, т.е. $v_{ij} > 0$ за всички i и j.

Получените действителни гласове са публикувани в [2] и са следните:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	34771	56050	55942	45205	24545	38996	19817	35478	17746	27685	25531	30826	39100	23444	52499
6@	28448	35201	60248	27521	10869	19679	16417	21457	4870	16955	16765	15824	23978	15455	26851
8@	7376	8683	13130	7247	2594	3685	4025	4002	1064	3762	4538	2461	5560	3839	6470
12@	7497	7468	11707	7357	2795	6515	3622	5955	540	2818	3793	3138	7089	2889	8609
14@	6142	20679	17920	15272	2608	6808	6303	7748	2229	3065	6485	4418	9163	4029	14165
17@	25472	28557	18916	6121	8026	1213	4041	14058	63570	978	5658	3047	14829	261	10238
19@	14899	12697	15427	10226	4327	6771	6459	3926	1975	4844	5867	6514	12725	7058	11920

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	42434	54575	15975	33400	23262	28006	18308	62206	47318	53267	40210	56809	22528	42585	26972	27581
6@	42996	33498	9549	25945	10162	14878	9813	43311	36011	35644	20860	28980	6262	23826	16018	13591
8@	14105	6027	1430	7050	1360	3363	4097	36536	29869	20693	5607	9435	2493	4452	2468	2324
12@	7678	7474	1772	7396	1805	4363	5365	11129	13133	13636	5612	9848	2759	8505	2050	3472
14@	12946	12314	5133	15125	4250	7941	2461	16992	15437	17554	11590	15325	5897	10033	10412	4837
17@	11797	15331	36435	14483	27514	8414	9060	899	4097	954	4712	8929	28610	21156	27455	1943
19@	21187	15060	2290	10558	2130	5745	5624	20148	15336	14911	7296	12046	2003	6535	6065	4207

В таблицата не се дадени гласовете от чужбина, които *не* участват в разпределението на мандатите на партиите по райони.

Задачата се формализира по следния начин: Дадени са неотрицателни числа v_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, r$, и цели числа n_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ и m_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, такива че $\sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{j=1}^{r} m_j = M (= 240)$. Търсим цели неотрицателни числа x_{ij} $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, r$, такива че да е в сила (1) и $\{x_{ij}\}$ да са "пропорционални" на $\{v_{ij}\}$.

Отново, както и при едномерната задача, понятието "пропорционални" не е добре определено. Характерна особеност на двумерната задача е, че прилагането на аналози на едномерните пропорционални методи води до резултати, нарушаващи интуитивните разбирания за добро решение. Например, решението може да е немонотонно (за някои партии или в някои райони), максималната и минималната цени на мандатите може да са много различни и т.н. Тези проблеми са присъщи на двумерната задача – за определени начални данни (получаващи се естествено при избори) не може да имаме монотонност и достатъчно близки цени на мандатите!

В настоящата статия са формулирани и решени редица задачи, представляващи двумерната задача плюс оптимизационно условие. При обсъждането на кой да е метод, предложен за решаване на двумерната задача, той може да бъде оценен като полученото решение се сравни доколко е далеч от най-добрите възможни решения (спрямо различните критерии). В случая това е методът на ЦИК.

Понятието "метод на Д'Ондт" е приелото гражданственост у нас по отношение на двумерната задача. В действителност Виктор Д'Ондт, който е белгийски юрист и математик, живял през XIX век, е предложил решение на едномерната задача и никога не е решавал двумерната задача. Методът, използван от ЦИК за решаване на двумерната задача, е създаден от неизвестен (и срамежлив) български математик или юрист за изборите за ВНС през 1990 г.

Преди да формулираме оптимизационни задачи, ще дадем разпределението на мандатите според методиката на ЦИК [4]. Методиката за разпределяне на мандатите на партиите по райони е използвана за първи път у нас в пропорционалната част на изборите за Велико Народно Събрание през 1990 г. Оттогава тя е претърпяла редица допълнения и уточнения, но алгоритъмът, създаден през 1990 г., би дал същите мандати за гласовете, получени на всички парламентарни избори от 1991 г. до сега.

Разпределението на ЦИК означаваме с X_0 и то е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	3	3	3	3	5	2	3	0	3	3	4	4	3	4	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	5	5	1	2	1	4
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	3	0	2	0	2	1	2	2	2	2	2	0	2	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5	4	2	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	2	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	2	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	2	3	1	0	0	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1	1	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	2	0	1	0	0	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0

Накратко, методиката на ЦИК [4] е следната: най-напред мандатите на всяка партия се разпределят пропорционално на получените гласове по районите (по Д'Ондт). Тъй като сумата от мандатите на различните партии в един район (изобщо) не е равна на определените мандати за този район, то се прави преразпределение на мандатите по районите в рамките на всяка партия.

Защо това разпределение не ни харесва? Следващите примери, където са дадени получени гласове - получени мандати в някои райони и за някои партии, са илюстрация на получените несъответствия.

Примери по райони:

Район →	23:		24:	
3@	62206	1	47318	1
6@	43311	2	36011	2
8@	36536	5	29869	4

Район →	09:	
3@	17746	0
17@	63570	5

Примери по партии:

Партия	6:		17:		23:	
3@	38996	5	54575	3	62206	1
6@	19679	2	33498	3	43311	2

Кое е “хубаво” разпределение? Няма най-добър критерий за това – зависи от модела. Във всеки конкретен модел се задава критерий, според който се намира оптимално решение.

Модел 1.

Ограниченията на задачата са същите както на добре известната транспортна задача. Правим модел, аналогичен на транспортна задача. Как да определим “цените на превозите”, за да минимизираме “транспортните разходи”? Тъй като връзката между гласове и мандати трябва да е правопропорционална, т.е. за повече гласове се получават повече мандати, разумно е “транспортните разходи” в нашия модел да са обратно пропорционални на броя гласове. По този начин целевата функция (общите “транспортни разходи”) е:

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \frac{x_{ij}}{v_{ij}}. \tag{2}$$

Задачата е: $\min F_1(X)$ при ограничения (1). Полученото оптимално решение X_1 е дадено в следната таблица:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	0	0	0	0	4	7	0	7	0	5	5	6	0	5	10	0	0	0	0	0	7	4	0	0	0	8	5	0	4	0	5
6@	0	0	14	9	0	0	4	0	0	0	0	0	9	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
8@	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	10	0	0	0	0	0	0	0
12@	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	0	0	0	0	0	0
14@	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17@	6	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4	4	6	0
19@	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0

със стойност на целевата функция $F_1(X_1) = 0.00908$. Очевидно това решение е неприемливо, защото мандатите в един район се дават само на една или две партии. Това може да бъде избягнато, ако поставим горни граници за променливите, напр. $x_{ij} \leq 6$. Целевата функция малко нараства (до 0.0094), но решението пак остава незадоволително.

За решението на ЦИК получаваме $F_1(X_0) = 0.01165$.

Модел 2.

Максимизираме най-малката цена на мандата. Цената на мандата за i-тата партия в j-тия район е $\dfrac{v_{ij}}{x_{ij}}$. Получаваме

$$\min_{i,j} \frac{v_{ij}}{x_{ij}} \quad \to \quad \max\,. \tag{3}$$

За да избегнем безкрайни стойности и да линеаризираме модела, вземаме реципрочна стойност на цената на мандата.

$$F_2(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \quad \to \quad \min\,. \tag{4}$$

Едно оптимално решение е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	5	7	6	6	3	5	2	4	0	4	3	4	5	3	2	0	1	0	0	1	4	2	0	0	0	5	1	0	3	2	4
6@	4	0	0	1	0	2	2	3	0	1	2	2	0	1	3	4	4	0	3	0	1	1	3	2	5	1	4	0	3	0	1
8@	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	5	4	3	0	1	0	0	0	0
12@	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	2	2	1	2	0	1	1	0
17@	1	1	2	0	1	0	0	0	5	0	0	0	2	0	1	0	2	5	1	3	1	1	0	0	0	0	1	4	0	3	0
19@	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	2	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

със стойност на целевата функция $F_2(X_2) = 0.00014502$. То се достига в (3@, 31:), т.е.

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{1\ 31}}{v_{1\ 31}} = \frac{4}{27581} = 0.00014502.$$

За решението на ЦИК получаваме $F(X_0) = F(X_2)$ и то също е оптимално решение на този модел.

Модел 3.

Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати. Както и в Модел 2, работим с реципрочните стойнодсти на цените на мандатите.

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j:\ x_{ij}>0} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \quad \to \quad \min, \tag{5}$$

Тук възникват затруднения с линеаризацията на втората част на целевата функция. Затова избираме друга, по-проста целева функция, която отново реализира идеята на модела.

$$F_3(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j} \frac{x_{ij}+1}{v_{ij}} \quad \to \quad \min\,. \tag{6}$$

Намереното оптимално решение X_3 е дадено в следната таблица:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	4	4	3	2	3	2	2	1	3	3	4	2	2	3	3	4	1	2	1	3	2	4	3	3	3	4	1	3	1	4
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	3	2	0	1	0	2	1	3	2	2	3	2	0	1	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	4	3	2	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	0
17@	2	2	1	0	1	0	0	2	4	0	0	0	2	0	1	0	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	0	0	0	0

със стойност на целевата функция $F_3(X_3) = 7.3538 \times 10^{-5}$. Тази стойност се достига за (19@, 06:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{76}}{v_{76}} = \frac{1}{6771} = 14.7689 \times 10^{-5}$$

и (3@, 30:)

$$\min_{i,j} \frac{x_{ij}+1}{v_{ij}} = \frac{x_{1\,30}+1}{v_{1\,30}} = \frac{2}{26972} = 7.4151 \times 10^{-5}.$$

Модел 4.

Да се опитаме да решим задачата за монотонност едновременно по партии и по райони. Това означава, че когато една партия е получила повече гласове в един район в сравнение с друг, тя получава и не по-малко мандати в първия район в сравнение с втория. Аналогично, когато една партия е получила повече гласове от друга партия в даден район, тя получава не по-малко мандати в този район. Т.е., ако за i-тата партия в j-тия и k-тия райони е в сила $v_{ij} > v_{ik}$, тогава е изпълнено $x_{ij} \geq x_{ik}$. И ако в j-тия район за i-тата и k-тата партии е изпълнено $v_{ij} > v_{kj}$, то сила е и $x_{ij} \geq x_{kj}$. Това свойство ще наричаме монотонност, а нарушаването му – немонотонност.

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & \mu_{ijk} = (x_{ij} - x_{ik})\,\mathrm{sign}(v_{ij} - v_{ik}) \geq 0, \quad i = 1,\dots,p,\ j = 1,\dots,r,\ k = 1,\dots,j; \\
& \nu_{ijk} = (x_{ij} - x_{kj})\,\mathrm{sign}(v_{ij} - v_{kj}) \geq 0, \quad j = 1,\dots,r,\ i = 1,\dots,p,\ k = 1,\dots,i.
\end{aligned}
$$

За съжаление областта, определена от транспортните равенства (1) и неравенствата (7), е празна. За да елиминираме малки разлики в гласовете, модифицираме модела, като разликите в гласовете делим целочислено на 1000 (т.е. ако разликата в гласовете на две партии в даден район е по-малко от 1000, считаме, че тези две партии са получили равен брой гласове). Но и в този случай допустимата област на задачата е празна.

Да образуваме релаксирана задача по следния начин:

$$F_4'(X) = z \quad \to \quad \min$$

при условия (1) и

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & \mu_{ijk} + z \geq 0, \quad i = 1,\dots,p, \quad j = 1,\dots,r, \quad k = 1,\dots,j; \\
& \nu_{ijk} + z \geq 0, \quad j = 1,\dots,r, \quad i = 1,\dots,p, \quad k = 1,\dots,i.
\end{aligned}
$$

Тази задача има решение с оптимална стойност $z = 1$. Това означава, че ако $v_{ij} > v_{ik}$, то $x_{ij} - x_{ik} \geq -1$. Решението X_4' е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	7	6	4	2	4	2	2	0	2	1	2	4	1	3	3	3	0	2	1	2	1	6	3	3	3	6	1	3	1	1
6@	3	3	5	1	1	1	1	2	1	1	0	1	2	1	2	4	4	0	1	1	1	1	3	3	4	0	2	0	2	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
12@	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
14@	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
17@	1	0	0	1	1	0	0	1	4	1	1	1	1	1	1	1	0	5	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	1	1	1
19@	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Следващата естествена стъпка в задачата за монотонност е да минимизираме броя на немонотонностите. Немонотонност в район j наричаме двойка партии (i_1, i_2), за които $v_{i_1 j} > v_{i_2 j}$ и $x_{i_1 j} < x_{i_2 j}$. Аналогично се дефинира и немонотонност в партия.

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & \mu_{ijk} + M y_{ijk} \geq 0, \qquad i = 1,\dots,p, \quad j = 1,\dots,r, \quad k = 1,\dots,j-1; \\
& \nu_{ijk} + M z_{ijk} \geq 0, \qquad j = 1,\dots,r, \quad i = 1,\dots,p, \quad k = 1,\dots,i-1,
\end{aligned}
$$

където $y_{ijk}, z_{ijk} \in \{0, 1\}$ и M е положителна константа. Когато двоична променлива y_{ijk} или z_{ijk} има стойност 0, тогава удовлетворяването на съответното неравенство показва монотонност, а при стойност 1 – немонотонност. Целевата функция е броят на немонотонностите:

$$F_4''(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{j-1} y_{ijk} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{i-1} z_{ijk} \quad \to \quad \min \tag{10}$$

Получено е решение X_4'' при $M = 1$ със стойност на целевата функция 24:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	3	3	2	3	2	3	0	3	2	3	3	2	3	3	3	0	3	2	3	2	4	3	3	3	4	2	3	2	3
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	1	2	2	2	2	2	0	2	1	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1	1	2	5	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	1	2	0
19@	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Решението на задачата при $M = 1$ с непрекъснати променливи $y_{ijk}, z_{ijk} \in [0, 1]$ е целочислено и същата стойност 24 на целевата функция. Интересно е да се отбележи, че софтуерът GLPK дава в този случай целочислено решение, което е различно от X_4''.

Модел 5.

Идеята на този модел е да минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия. Например ако една партия е получила $\frac{1}{k}$ част от гласовете в даден район, то тази партия би трябвало да получи приблизително $\frac{1}{k}$ част от определените мандати за този район, т.е. $\frac{v_{ij}}{w_j} \approx \frac{x_{ij}}{m_j}$, където w_j е сумата от гласовете на участващите в разпределението партии в този район.

$$w_j = \sum_{i=1}^{p} v_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Аналогично се реализира тази идея и за разпределението на мандатите на една партия по райони – искаме $\frac{v_{ij}}{v_i} \approx \frac{x_{ij}}{n_i}$, където v_i е сумата от гласовете на партия i във всички райони.

$$v_i = \sum_{j=1}^{r} v_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Прецизирането на понятието близост ни води към използване на класическа l_p норма. Поради използване на означението p за брой партии, ще заменим p с s:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right|^s + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right|^s \quad \to \quad \min \tag{11}$$

Най-напред да формулираме задачата с равномерна (l_∞) норма:

$$F_5(X) = \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \quad \to \quad \min \tag{12}$$

Решението X_5 е дадено в таблицата:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	6	6	2	2	3	1	2	1	3	2	3	2	2	5	2	5	1	2	1	3	1	5	2	6	3	3	1	2	1	2
6@	2	2	3	2	1	1	1	2	0	1	1	1	3	1	1	4	2	1	1	1	2	1	2	4	1	3	3	1	2	2	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	3	1	1	1	1	1	0	2	4	0	1	1	2	0	0	0	1	3	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1

със стойност на целевата функция

$$F_5(X_5) = 0.16124 + 0.03775 = 0.19899,$$

което се достига при (12@, 13:) и (6@, 28:). За решението на ЦИК получаваме

$$F_5(X_0) = 0.135089 + 0.359636 = 0.494726$$

при (8@, 23:) и (17@, 20:).

Модел 6.

За да получим лесно решими задачи с l_s норма за $1 \le s < \infty$, използваме една подходяща линеаризация на тези задачи.

За всяка двойка $(i,j), i = 1,\dots,p; j = 1,\dots,r$ полагаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \cdots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^{q} kx_{ijk},$$

$$\left|\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i}\right|^s = f^{(1)}_{ijk}, \quad \left|\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j}\right|^s = f^{(2)}_{ijk}, \quad k = 0,1,\dots,q.$$

Целевата функция е:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{q}\left(f^{(1)}_{ijk} + f^{(2)}_{ijk}\right)x_{ijk}. \tag{13}$$

Търсим $\min F(X)$ при ограничения (1), които се преобразуват в (14):

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} kx_{ijk} = n_i, \quad i = 1,2,\dots,p; \quad \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} kx_{ijk} = m_j, \; j = 1,2,\dots,r; \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{q} x_{ijk} = 1, \quad i = 1,2,\dots,p, \quad j = 1,2,\dots,r; \quad x_{ijk} \in \{0,1\}, \text{ за всяко } i,j,k. \tag{15}$$

Размерите на задачата са: (за $p = 7$, $r = 31$, $q = 6$)

– брой неизвестни: $pr(q+1) = 1519$;

– брой събираеми в целевата функция: $pr(q+1) = 1519$;

– брой ограничения: $p + r = 38$ от първия вид (14) и $pr = 217$ от втория вид (15).

Най-напред ще използваме l_1 норма.

$$F_6(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i}\right| + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}\left|\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j}\right| \quad \to \quad \min \tag{16}$$

Прилагаме описаната техника за този модел и решаваме получената задача. Оптималната стойност на целевата функция е $F_6(X_6) = 12.2766$ за следното решение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	4	3	2	3	1	3	1	2	2	3	3	2	4	3	4	1	2	1	3	1	4	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	2	3	4	2	1	2	1	2	0	2	1	1	2	1	2	3	2	1	2	1	1	1	3	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	4	0	1	1	1	0	1	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Модел 7.

Най-използваният модел за отклонение от средното е минимизация с l_2 норма (най-малки квадрати).

$$F_7(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i}\right)^2 + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j}\right)^2 \quad \to \quad \min \tag{17}$$

След линеаризиране на задачата по описания по-горе начин и решаването на получената линейна целочислена задача, намираме стойност на целевата функция $F_7(X_7) = 0.702059$ за следното разпределение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	4	3	2	3	1	3	1	2	2	3	3	2	4	3	4	1	2	1	3	1	4	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	2	2	4	2	1	2	1	2	0	2	1	2	2	1	2	3	2	1	2	1	1	1	3	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	2	3	2	0	1	0	0	1	4	0	1	0	1	0	1	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Това решение е единствено! За да докажем това твърдение, към ограниченията на задачата добавяме още едно:

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk} \le pr - 1,$$

където $\{x_{ijk}^{(0)}\}$ е намереното решение на линеаризираната задача (13)-(14)-(15). Тъй като очевидно

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{q} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r} 1 = pr,$$

то решението на новата задача ще бъде друго. За стойност на целевата функция за новото решение получаваме

$$0.703095 > F_7(X_7) = 0.702059.$$

Защо полученото от този модел разпределение е по-добро?

Примери по райони:

Район →	23:		24:	
3@	62206	4	47318	3
6@	43311	3	36011	2
8@	36536	3	29869	2

Район →	09:	
3@	17746	1
17@	63570	4

Примери по партии:

Партия	6:		17:		23:	
3@	38996	3	54575	4	62206	4
6@	19679	2	33498	2	43311	3

Сравнителни резултати

Разгледаните в тази статия методи имат преди всичко за цел пресмятането на оптималните стойности на съответните целеви функции, а не създаване на "добър" метод за разпределяне на мандатите на партиите по райони. Поради тази причина не сме разглеждали въпроса за избор на решение в случаите, когато то не е единствено. Считаме, че когато се предлага метод за разпределяне на мандатите на партиите по райони, то той трябва да се сравни с най-добрите методи по посочените критерии. В следващата таблица сравняваме по тези критерии получените в тази статия решения, решенията по метода, използван в ЦИК, а също така и метода, предложен в дискусиите след изборите от И. Божинов [3].

	F_1 $\times 10^{-2}$	F_2 $\times 10^{-4}$	F_3 $\times 10^{-4}$	F_4	F_5	F_6 $\times 10$	F_7
X_1	**0.908**	8.80	8.64	246	1.7634	4.987	18.39
X_2	1.151	**1.45**	1.29	352	0.7296	2.627	4.173
X_3	1.216	1.48	**0.74**	153	0.4409	1.691	1.585
X_4'	2.421	3.83	3.70	378	0.5982	2.029	2.197
X_4''	1.128	1.79	1.25	**24**	0.5793	1.511	1.359
X_5	1.520	8.24	7.68	214	**0.1990**	1.617	1.183
X_6	1.426	3.28	2.49	61	0.2035	**1.228**	0.705
X_7	1.400	2.60	1.82	61	0.2035	1.231	**0.702**
X_0	1.166	1.45	1.12	148	0.4947	1.836	2.043
IB	1.435	5.32	4.53	178	0.4458	1.459	1.200

От разгледаните методи най-добър по съвкупността от показатели е Метод 7, а след него – Метод 6. Методът на ЦИК реализира екстремума на критерий 2 и дава много добри резултати по критерии 1 и 3. За съжалание той не дава добри резултати по останалите критерии.

Също така отделните методи трябва да се сравнят и по данните от предишни парламентарни избори, разгледани като примери на реални данни. Необходимо е и пресмятане на средните отклонения на даден метод по всеки от критериите, като усредняването се взема по множество от допустими начални данни.

Пресмятанията са направени с пакета GLPK [6], операционна система BSD на компютър AMD64/2GHz. Модел 4: (9)-(10) за $M = 1$ беше решен и с пакета CPLEX [7]. И двата пакета не можаха да решат същия модел за $M = 10$. Въпреки, че CPLEX решава квадратични задачи с линейни ограничения, опитът за директно решаване на Модел 7: (17) не доведе до успех.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ЗАКОН за избиране на народни представители,
`http://ou.government.bg/rc/PARLAMENTARNI-2005/ZINP.htm` (30.12.2005)

[2] Изборни резултати - парламентарни избори - 25.06.2005г.
http://www.izbori-2005.org/results/index.html (30.12.2005)
[3] Илия Божинов, Методът Д'Онт и изборните резултати. Какво е сбъркано, кой е виновен и как може да се оправи работата.
http://www.zabulgaria.com/cgi-bin/e-cms/vis/vis.pl?s=001&p=0264&n=000012&g= (27.12.2005)
[4] Методика за определяне на броя на мандатите в избирателните райони и на резултатите от гласуването, ЦИК – РЕШЕНИЕ НОМЕР 14, 14.04.2005.
http://www.is-bg.net/cik2005/news.php?id=30&sub=3 (30.12.2005)
[5] D'Ont worry, be happy!, Вестник НОВИНАР, Брой 301, (1543), 29.06.2005
http://www.novinar.org/main.php?act=news&act1=det&sql=MTY0NDsxMA==&mater=MTY0NDs2OA== (30.12.2005)
[6] GLPK (GNU Linear Programming Kit)
http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html (30.12.2005)
[7] ILOG CPLEX: High-performance software for mathematical programming,
http://www.ilog.com/products/cplex/ (22.01.2006)

Камен Ганчев Иванов
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. "Акад.Г.Бончев", бл.8
1113 София
e-mail: kamen@math.bas.bg

Никола Иванов Янев
Факултет по математика и информатика
Софийски университет "Св. Кл. Охридски"
бул. "Джеймс Баучър" 5
1164 София
e-mail: nyanev@irisa.fr

Николай Киров Киров
Департамент Информатика
Нов български университет
1618 София,
ул. "Монтевидео" 21
e-mail: nkirov@nbu.bg
Институт по математика
и информатика
Българска академия на науките
ул. "Акад.Г.Бончев", бл.8
1113 София
e-mail: nkirov@math.bas.bg

OPTIMAL DISTRIBUTION OF THE PARTIES MANDATES FOR 40. PARLIAMENT AMONG ELECTORAL DISTRICTS

Kamen Ganchev Ivanov, Nikolay Kirov Kirov, Nicola Ivanov Yanev

In the 2005 Parliamentary elections 7 parties passed the 4% threshold and took part in the distribution of 240 mandates. According to the election low, mandates were allocated among these parties applying D'Hondt method. After that the mandates of the parties should be distributed among electoral districts. This was done in accordance to a method defined by the Central Election Commission (CEC) and provoked reasonably discontent among the people because the proportionality principle between received votes and distributed mandates in a given district was violated seriously.
In this article we lay out and solve some optimization models for solving this problem. It is shown that the CEC method gives an optimal solution (one of many) in some models. Also some better solutions are obtained and the solution in a model of least square deviation from proportionality is unique.