Едно оптимално разпределение на мандатите на партиите за 40. Народно събрание по избирателни райони

Задача за разпределение на мандатите по партии

Дадени са p партии ($p = 7$), които събират повече от 4% от действителните гласове на изборите за 40. Народно събрание. Означаваме партиите с 3@, 6@, 8@, 12@, 14@, 17@ и 19@. Мандатите за тези партии се определят пропорционално на получените гласове (Метод на Д'Ондт). Нека i-тата партия е получила v_i гласа в цялата страна. Броят на мандатите на партиите n_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) е решение на следната оптимизационна задача:

$$\min_i \frac{v_i}{n_i} \quad \to \quad \max \quad \left(\max_i \frac{n_i}{v_i} \quad \to \quad \min \right)$$

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = M, \qquad (M = 240),$$

където n_i са цели неотрицателни числа и решението е:

No i	партия	гласове v_i	мандати n_i
1	3@	1129196	82
2	6@	725314	53
3	8@	234778	17
4	12@	189268	13
5	14@	296848	21
6	17@	467400	34
7	19@	280323	20
	Общо		240

Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони

Дадени са r избирателни района ($r = 31$), като за всеки район е определен предварително броят на мандатите m_j в този район (по закон пропорционално на населението му).

No j	Избирателен район	мандати m_j
01:	Благоевград	10
02:	Бургас	13
03:	Варна	14
04:	Велико Търново	9
05:	Враца	7
07:	Габрово	4
08:	Добрич	7
09:	Кърджали	5
10:	Кюстендил	5
11:	Ловеч	5
12:	Монтана	6
13:	Пазарджик	9
14:	Перник	5
15:	Плевен	10
16:	Пловдив град	10

No j	Избирателен район	мандати m_j
17:	Пловдив окръг	11
18:	Разград	5
19:	Русе	8
20:	Силистра	4
21:	Сливен	7
22:	Смолян	4
23:	София 1	13
24:	София 2	11
25:	София окръг	8
27:	Стара Загора	11
28:	Търговище	4
29:	Хасково	8
30:	Шумен	6
31:	Ямбол	5
	Общо:	240

Задачата е да се разпределят получените мандати на партиите по избирателните райони.

Нека $X = \left\{x_{ij}\right\}_{i,j}$ са разпределените мандати на i-тата партия в j-тия район. Тогава трябва да бъдат изпълнени равенствата:

$$\sum_{j=1}^{r} x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

като x_{ij} са *цели неотрицателни* числа. Тези ограничения са същите както при целочислена транспортна задача. Известна ни е и матрицата на вота с елементи v_{ij} – броят на гласовете на i-тата партия в j-тия район, $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, r$. Ще решаваме задачата при следните две предположения за разглежданите партии:

– регистрация във всички избирателни райони с достатъчно дълга партийна листа;

– $v_{ij} > 0$, т.е. всяка партия получава поне един глас във всеки избирателен район.

	3@	6@	8@	12@	14@	17@	19@	w_j
01:	34771	28448	7376	7497	6142	25472	14899	124605
02:	56050	35201	8683	7468	20679	28557	12697	169335
03:	55942	60248	13130	11707	17920	18916	15427	193290
04:	45205	27521	7247	7357	15272	6121	10226	118949
05:	24545	10869	2594	2795	2608	8026	4327	55764
06:	38996	19679	3685	6515	6808	1213	6771	83667
07:	19817	16417	4025	3622	6303	4041	6459	60684
08:	35478	21457	4002	5955	7748	14058	3926	92624
09:	17746	4870	1064	540	2229	63570	1975	91994
10:	27685	16955	3762	2818	3065	978	4844	60107
11:	25531	16765	4538	3793	6485	5658	5867	68637
12:	30826	15824	2461	3138	4418	3047	6514	66228
13:	39100	23978	5560	7089	9163	14829	12725	112444
14:	23444	15455	3839	2889	4029	261	7058	56975
15:	52499	26851	6470	8609	14165	10238	11920	130752
16:	42434	42996	14105	7678	12946	11797	21187	153143
17:	54575	33498	6027	7474	12314	15331	15060	144279
18:	15975	9549	1430	1772	5133	36435	2290	72584
19:	33400	25945	7050	7396	15125	14483	10558	113957
20:	23262	10162	1360	1805	4250	27514	2130	70483
21:	28006	14878	3363	4363	7941	8414	5745	72710
22:	18308	9813	4097	5365	2461	9060	5624	54728
23:	62206	43311	36536	11129	16992	899	20148	191221
24:	47318	36011	29869	13133	15437	4097	15336	161201
25:	53267	35644	20693	13636	17554	954	14911	156659
26:	40210	20860	5607	5612	11590	4712	7296	95887
27:	56809	28980	9435	9848	15325	8929	12046	141372
28:	22528	6262	2493	2759	5897	28610	2003	70552
29:	42585	23826	4452	8505	10033	21156	6535	117092
30:	26972	16018	2468	2050	10412	27455	6065	91440
31:	27581	13591	2324	3472	4837	1943	4207	57955
v_i	1123071	711882	229745	187789	295281	426774	276776	

Преди да формулираме оптимизационни задачи, ще дадем разпределението X_0 на мандатите според ЦИК, т.е. според методиката на ЦИК. Ще отбележим, че по тази методика са разпределяни мандатите на всички парламентарни избори от 1991 г. до сега.

	3@	6@	8@	12@	14@	17@	19@	n_j
01:	2	2	1	1	0	2	2	10
02:	3	2	1	1	2	3	1	13
03:	3	4	1	1	2	1	2	14
04:	3	2	1	1	1	0	1	9
05:	3	1	0	0	0	0	0	4
06:	5	2	0	0	0	0	0	7
07:	2	2	0	0	0	0	0	4
08:	3	2	0	0	1	1	0	7
09:	0	0	0	0	0	5	0	5
10:	3	2	0	0	0	0	0	5
11:	3	2	0	0	0	0	0	5
12:	4	2	0	0	0	0	0	6
13:	4	2	0	0	1	1	1	9
14:	3	2	0	0	0	0	0	5
15:	4	2	0	1	1	1	1	10
16:	2	2	1	1	1	1	2	10
17:	3	3	0	1	1	1	2	11
18:	1	0	0	0	0	4	0	5
19:	2	2	0	1	1	1	1	8
20:	1	0	0	0	0	3	0	4
21:	3	2	0	0	1	1	0	7
22:	2	1	0	0	0	1	0	4
23:	1	2	5	1	2	0	2	13
24:	1	2	4	1	1	0	2	11
25:	3	2	2	1	2	0	2	12
26:	5	2	0	0	1	0	0	8
27:	5	2	1	1	1	0	1	11
28:	1	0	0	0	0	3	0	4
29:	2	2	0	1	1	2	0	8
30:	1	1	0	0	1	3	0	6
31:	4	1	0	0	0	0	0	5
m_i	82	53	17	13	21	34	20	240

Накратко, методиката е следната: най-напред мандатите на всяка партия се разпределят пропорционално на получените гласове по районите (по Д'Ондт). Тъй като сумата от мандатите на различните партии в един район (изобщо) не е равна на определените мандати за този район, то се прави преразпределение на мандатите по районите в рамките на всяка партия. Решението на ЦИК означаваме с X_0.

Защо това разпределение не ни харесва?

Пример по райони:

	3@		6@		8@		17@	
09:	17746	0	-	-	-	-	63570	5
23:	62206	1	43311	2	36536	5	-	-
24:	47318	1	36011	2	29869	4	-	-

Пример по партии:

	3@		6@	
06:	38996	5	19679	2
17:	54575	3	33498	3
23:	62206	1	43311	2

Кое е “хубаво” разпределение?

Няма най-добър критерий за това - зависи от модела.

Модел 7 (К. Иванов)

Най-използваният модел за намиране на решение, удовлетворяващо някакви ограничения, най-близко до идеалното решение (без ограничения) е минимизация с l_2 норма (най-малки квадрати).

$$F_7(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i}\right)^2 + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \min \qquad (2)$$

Линеаризация на задачата (Н. Янев)

За всяка двойка $(i,j), i = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,r$ полагаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \cdots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^{q} kx_{ijk}$$

$$\left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i}\right)^2 = f_{ijk}^{(1)}, \quad \left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j}\right)^2 = f_{ijk}^{(2)}, k = 0,1,\ldots,q.$$

Целевата функция е:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{q} \left(f_{ijk}^{(1)} + f_{ijk}^{(2)} \right) x_{ijk}. \tag{3}$$

Търсим $\min F(X)$ при ограничения:

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} k x_{ijk} = n_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \qquad \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} k x_{ijk} = m_j, \ j = 1, 2, \ldots, r;$$

$$\sum_{k=0}^{q} x_{ijk} = 1, \ \ i = 1, 2, \ldots, p, \ \ j = 1, 2, \ldots, r; \quad x_{ijk} \in \{0, 1\}, \text{ за всяко } i, j, k.$$

Размери на задачата: ($p = 7$, $r = 31$, $q = 6$)

– неизвестни: $pr(q + 1) = 1519$;

– събираеми в целевата функция: $pr(q + 1) = 1519$;

– ограничения: $p + r = 38$ от първия вид и $pr = 217$ от втория вид.

	3@	6@	8@	12@	14@	17@	19@
01:	3	2	1	1	0	2	1
02:	4	2	1	1	1	3	1
03:	4	4	1	1	1	2	1
04:	3	2	1	1	1	0	1
05:	2	1	0	0	0	1	0
06:	3	2	0	1	1	0	0
07:	1	1	0	0	1	0	1
08:	3	2	0	0	1	1	0
09:	1	0	0	0	0	4	0
10:	2	2	0	0	0	0	1
11:	2	1	0	0	1	1	0
12:	3	2	0	0	0	0	1
13:	3	2	0	1	1	1	1
14:	2	1	1	0	0	0	1
15:	4	2	0	1	1	1	1
16:	3	3	1	0	1	1	1
17:	4	2	1	1	1	1	1
18:	1	1	0	0	0	3	0
19:	2	2	1	0	1	1	1
20:	1	1	0	0	0	2	0
21:	3	1	0	0	1	1	1
22:	1	1	0	0	0	1	1
23:	4	3	3	1	1	0	1
24:	3	2	2	1	1	1	1
25:	4	3	2	1	1	0	1
26:	3	2	1	0	1	0	1
27:	4	2	1	1	1	1	1
28:	1	1	0	0	0	2	0
29:	3	1	0	1	1	2	0
30:	2	1	0	0	1	2	0
31:	3	1	0	0	1	0	0

Това решение е единствено! За да докажем това твърдение, към ограниченията на задачата добавяме още едно:

$$\sum_{x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk} \le pr - 1,$$

където $x_{ijk}^{(0)}$ е намереното решение. Тъй като очевидно

$$\sum_{x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{q} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} 1 = pr,$$

то решението на новата задача ще бъде друго. За стойност на целевата функция за новото решение получаваме

$$0.7030951292 > F_7(X_7) = 0.7020591912.$$

За решението на ЦИК X_0 получаваме $F_7(X_0) = 2.04346$.

Защо това разпределение е по-добро?

Пример по райони:

	3@		6@		8@		17@	
09:	17746	1	-	-	-	-	63570	4
23:	62206	4	43311	3	36536	3	-	-
24:	47318	3	36011	2	29869	2	-	-

Пример по партии:

	3@		6@	
06:	38996	3	19679	2
17:	54575	4	33498	2
23:	62206	4	43311	3

Заключение

GLPK, BSD, AMD64, 2GHZ

Анализ на резултатите:

– най-лоши случаи;

– тегла на двете суми в целевата функция $F_7(X_7) = 0,0576 + 0,644$;

– сравнение с резултата на И. Божинов;

– сравнение с другите модели ...

Получаване на резултати за предишни избори.

`http://www.math.bas.bg/~nkirov/2005/izb_s.pdf`

`http://www.math.bas.bg/~nkirov/2005/izb_s1.pdf`

Благодаря за вниманието :)